平成３１年度　愛知医科大学　推薦入試　数学

Ⅰ．方程式 $z^2=3+4i$ を解け。（予想配点：10 点）

〔解答〕

$z=x+yi$ （x, y は実数）とおくと

$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ 　であるから，方程式は

$$x^2-y^2+2xyi=3+4i$$

とかける。

x, y は実数であるから，x^2-y^2，$2xy$ も実数なので

$$x^2-y^2=3 \ \cdots \ ①, \quad 2xy=4 \ \cdots \ ②$$

②より　$x^2y^2=4$ 　であり，①から $y^2=x^2-3$ なので

$$x^2(x^2-3)=4 \iff x^4-3x^2-4=0 \iff (x^2+1)(x^2-4)=0$$

$x^2 \geqq 0$ なので　$x^2=4$ 　　　ゆえに $x=\pm 2$ 　　　②より $y=\pm 1$（複号同順）

したがって　$\underline{z=2+i, \ -2-i}$ …（答）

Ⅱ．$0 \leqq x, y \leqq \pi$ とする。条件 $\cos x+\cos y=1$ のもとでの $\sin x+\sin y$ の最大値とそのときの x, y の値を求めよ。（予想配点：15 点）

〔解答〕

$\cos x+\cos y=1$ の両辺を 2 乗すると　$\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=1$ … ①

$\sin x+\sin y=k$ とおき，両辺を 2 乗すると　$\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y=k^2$ … ②

①＋②より

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+(\sin^2 y+\cos^2 y)=k^2+1$$

$$\therefore \quad 1+2\cos(x-y)+1=k^2+1 \iff \cos(x-y)=\frac{k^2-1}{2}$$

$0 \leqq x, y \leqq \pi$ より $-\pi \leqq x-y \leqq \pi$ なので　$-1 \leqq \cos(x-y) \leqq 1$

$$\therefore \quad -1 \leqq \frac{k^2-1}{2} \leqq 1 \iff -1 \leqq k^2 \leqq 3$$

$k^2 \geqq -1$ は常に成り立つから　$k^2 \leqq 3$ から $-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$

$k=\sqrt{3}$ のとき $\cos(x-y)=1$ なので $-\pi \leqq x-y \leqq \pi$ より

$$x-y=0 \iff y=x$$

このとき，条件から　$\cos x+\cos x=1 \iff \cos x=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$x=\dfrac{\pi}{3}$ 　　　このとき $y=\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$\underline{x=\dfrac{\pi}{3}, \ y=\dfrac{\pi}{3} \text{ のとき 最大値} \sqrt{3}}$ …（答）

Ⅲ．xy 平面において，点 P は x 軸上の正負の方向のいずれかに，　点 Q は y 軸上の正負のいずれかの方向に，それぞれ 1 秒間に 1 だけ等確率で進む。初期時刻では P, Q いずれも原点にあるとして，次の問いに答えよ。（予想配点：1）10 点　2) 15 点）

1)　2 秒後に点 P と点 Q が同じ位置にある確率を求めよ。

2)　k を自然数とするとき, $2k$ 秒後に点 P と点 Q が同じ位置にある確率を求めよ。

〔解答〕

1)　2 秒後に点 P, 点 Q がともに原点にあればよい。

点 P は $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0)$ または $(0, 0) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (0, 0)$ のように移動すればよいので，その確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

点 Q は $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (0, 0)$ または $(0, 0) \rightarrow (0, -1) \rightarrow (0, 0)$ のように移動すればよいので，その確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ゆえに，求める確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{4}}$　…（答）

2)　$2k$ 秒後に点 P, 点 Q がともに原点にあればよい。

$2k$ 秒後に点 P が原点にあるためには, $2k$ 回の移動のうち, k 回は正の方向に進み, k 回は負の方向に進めばよい。よって，その確率は　${}_{2k}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k={}_{2k}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

点 Q が原点にある確率も同様に考えて，確率は　${}_{2k}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

したがって，求める確率は　${}_{2k}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\times{}_{2k}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k=\underline{\left({}_{2k}C_k\right)^2\left(\frac{1}{16}\right)^k}$　…（答）

Ⅳ. 放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{4}$ 上の点で，第 1 象限にあり焦点からの距離が 4 である点を A とするとき，次の問いに答えよ。（予想配点：1）10 点　2) 15 点）

1) 点 A における接線の方程式を求めよ。

2) 放物線 C，準線，点 A における接線および y 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔解答〕

1) $y=\dfrac{x^2}{4} \iff x^2=4y$ … ① であるから，焦点の座標は $(0,1)$，準線は直線 $y=-1$

点 A は焦点からの距離が 4 なので，準線からの距離も 4 となる。

よって，点 A の y 座標は 3 と分かるので，x 座標を $t(>0)$ とおくと，①より

$$t^2=12 \qquad \therefore\ t=2\sqrt{3}$$

ゆえに，点 A の座標は $(2\sqrt{3},3)$

$y=\dfrac{x^2}{4}$ から $y'=\dfrac{x}{2}$ なので，点 A における接線の傾きは $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$y-3=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3}) \iff \underline{y=\sqrt{3}x-3} \ \cdots（答）$$

2) 題意の立体は，図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させた図形であるので，

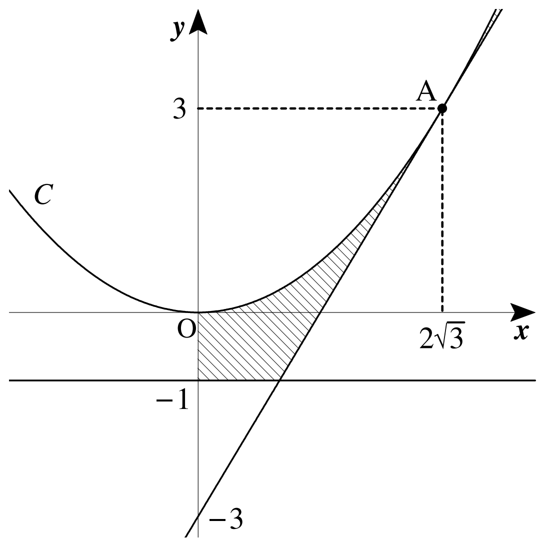
$y=\sqrt{3}x-3 \iff x=\dfrac{y+3}{\sqrt{3}}$ と①から，求める体積は

$$\pi\int_{-1}^{3}\left(\frac{y+3}{\sqrt{3}}\right)^2 dy-\pi\int_0^3 4y\,dy$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[\frac{(y+3)^3}{3}\right]_{-1}^{3}-\pi\left[2y^2\right]_0^3$$

$$=\frac{\pi}{9}(216-8)-18\pi$$

$$=\underline{\frac{46}{9}\pi} \ \cdots（答）$$

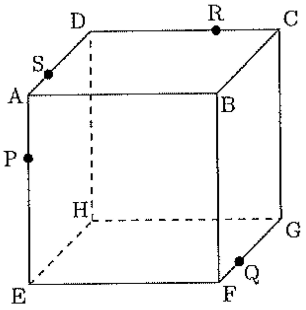


V．右下のような立方体 ABCD-EFGH において，辺 AE，辺 FG，辺 CD，辺 AD を 1：2 に内分する点をそれぞれ P, Q, R, S とするとき，次の問いに答えよ。

（予想配点：(a) 8 点　(b) 17 点）

(a) $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{AS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(b) 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ。



〔解答〕

(a) AP：PE＝1：2 より $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$ …（答）

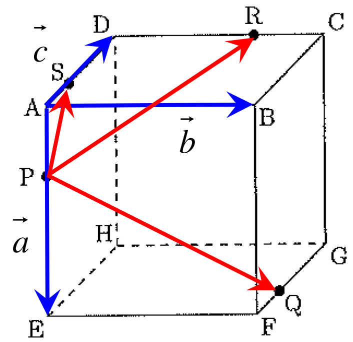
FQ：QG＝1：2 より

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FQ}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\ \cdots（答）$$

CR：RD＝1：2 より

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}\ \cdots（答）$$

AS：SD＝1：2 より $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$



(b) (a)より

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$\overrightarrow{PS}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}$ が成り立つとすると

$$-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}=s\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}=\left(\frac{2}{3}s-\frac{1}{3}t\right)\vec{a}+\left(s+\frac{2}{3}t\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{3}s+t\right)\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は一次独立であるから

$$\frac{2}{3}s-\frac{1}{3}t=-\frac{1}{3}\ \ldots ①\qquad s+\frac{2}{3}t=0\ \ldots ②\qquad \frac{1}{3}s+t=\frac{1}{3}\ \ldots ③$$

①，②を連立させて解くと　$s=-\dfrac{2}{7}$，　$t=\dfrac{3}{7}$　　これは③も満たす。

$\overrightarrow{PS}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}$　となる実数 s, t が存在するので，4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある。