$\boxed{1}$ 1) 10 点　2) 10 点　3) 5 点　計25点

次の問いに答えよ。

1) 方程式 $\log_3(x^4+5x^2+4)-\log_{\sqrt{3}}x-2=0$ を解け。

2) $a>1$ とする。定積分 $\int_0^1 |ax^2-(a+1)x+1|\,dx$ を a の式で表せ。

3) 初級者 9 名と上級者 3 名の計 12 名を 4 名ずつ 3 つの組に分ける。このとき，すべての組に上級者が入る分け方は何通りあるか。

$\boxed{2}$ 15 点

$|2\vec{a}-3\vec{b}|=2$，$|3\vec{a}-4\vec{b}|=3$，$|5\vec{a}-7\vec{b}|=\sqrt{19}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 1) 10 点　2) 20 点　計 30 点

1 から n までの自然数を並べかえてできる項数 n の数列 $\{a_k\}$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

1) $a_k=n-k+1$ であるとき，$\sum_{k=1}^{n} ka_k$ を求めよ。

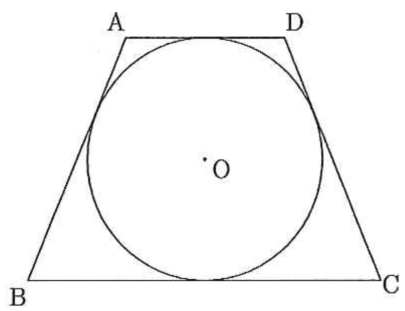
2) 1) で求めた和を S とするとき，すべての数列 $\{a_k\}$ に対して $\sum_{k=1}^{n} ka_k \geqq S$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{4}$ 1) 25 点　2) 5 点　計 30 点

AB＝CD である等脚台形が，中心 O，半径 1 の円と下図のように各辺において接している。以下の問いに答えよ。

1) $\angle\mathrm{OBC}=\theta$ とするとき，この等脚台形の面積 S を θ の式で表せ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

2) 面積 S の最小値を求めよ。



$\boxed{1}$ 1) 10 点　2) 10 点　3) 5 点　計25点

1) 真数は正であるから　$x^4+5x^2+4>0$ かつ $x>0$ …… ①

方程式を変形すると

$$\log_3(x^4+5x^2+4)-\frac{\log_3 x}{\log_3\sqrt{3}}-2=0$$

$\Leftrightarrow$　$\log_3(x^4+5x^2+4)=2\log_3 x+2$

よって　$\log_3(x^4+5x^2+4)=\log_3 9x^2$

ゆえに　$x^4+5x^2+4=9x^2$　$\Leftrightarrow$　$x^4-4x^2+4=0$

$\Leftrightarrow$　$(x^2-2)^2=0$

したがって　$x^2=2$　$\Leftrightarrow$　$x=\pm\sqrt{2}$

① を満たすのは　$x=\sqrt{2}$

2) $I=\int_0^1|ax^2-(a+1)x+1|dx$ とおく。

$I=\int_0^1|(ax-1)(x-1)|dx$ であり，$a>1$ のとき $0<\frac{1}{a}<1$ であるから

$0\leqq x\leqq\frac{1}{a}$ のとき $(ax-1)(x-1)\geqq0$

$\frac{1}{a}\leqq x\leqq1$ のとき $(ax-1)(x-1)\leqq0$

よって　$I=\int_0^{\frac{1}{a}}\{ax^2-(a+1)x+1\}dx+\int_{\frac{1}{a}}^1-\{ax^2-(a+1)x+1\}dx$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+x\right]_0^{\frac{1}{a}}-\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+x\right]_{\frac{1}{a}}^1$$

$$=2\left\{\frac{a}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^3-\frac{a+1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}\right\}-\left(\frac{a}{3}-\frac{a+1}{2}+1\right)$$

$$=-\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a}+\frac{a}{6}-\frac{1}{2}$$

3) 3 名の上級者を A，B，C として，9 名の初級者を 3 名ずつ A，B，C の組に分ければよいので，求める分け方は

$${}_9C_3\times{}_6C_3=84\times20=1680\ (通り)$$

$\boxed{2}$ 15 点

$|2\vec{a}-3\vec{b}|=2$，$|3\vec{a}-4\vec{b}|=3$，$|5\vec{a}-7\vec{b}|=\sqrt{19}$ のそれぞれの両辺を 2 乗すると

$4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4$　…… ①

$9|\vec{a}|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=9$　…… ②

$25|\vec{a}|^2-70\vec{a}\cdot\vec{b}+49|\vec{b}|^2=19$　…… ③

①×2−② より

$-|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=-1$　$\Leftrightarrow$　$|\vec{a}|^2=2|\vec{b}|^2+1$

これを ①，③ に代入して整理するとそれぞれ

$-12\vec{a}\cdot\vec{b}+17|\vec{b}|^2=0$　…… ④

$-70\vec{a}\cdot\vec{b}+99|\vec{b}|^2=-6$　…… ⑤

④ より　$|\vec{b}|^2=\frac{12}{17}\vec{a}\cdot\vec{b}$

これを ⑤ に代入して　$-70\vec{a}\cdot\vec{b}+99\cdot\frac{12}{17}\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=51$

$\boxed{3}$ 1) 10 点　2) 20 点　計 30 点

1) $\sum_{k=1}^n ka_k=\sum_{k=1}^n k(n-k+1)=\sum_{k=1}^n\{(n+1)k-k^2\}$

$$=(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

2) $ka_k=\frac{1}{2}\{a_k{}^2+k^2-(a_k-k)^2\}$　であるから

$$\sum_{k=1}^n ka_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\{a_k{}^2+k^2-(a_k-k)^2\}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^n a_k{}^2+\sum_{k=1}^n k^2-\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2\right\}$$

a_1，a_2，……，a_n は 1，2，……，n を並べ替えたものであるから　$\sum_{k=1}^n a_k{}^2=\sum_{k=1}^n k^2$

よって　$\sum_{k=1}^n ka_k=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^n a_k{}^2+\sum_{k=1}^n k^2-\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^n k^2+\sum_{k=1}^n k^2-\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^n k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2$$

ここで　$(a_k-k)^2+\{a_k-(n-k+1)\}^2$

$$=a_k{}^2-2ka_k+k^2+a_k{}^2-2(n-k+1)a_k+(n-k+1)^2$$

$$=2a_k{}^2+k^2-2(n+1)a_k+(n-k+1)^2\quad\cdots\cdots ①$$

a_1，a_2，……，a_n は 1，2，……，n を並べ替えたものであるから

$$\sum_{k=1}^n a_k{}^2=\sum_{k=1}^n k^2,\quad \sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n k$$

また　$\sum_{k=1}^n(n-k+1)^2=n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2=\sum_{k=1}^n k^2$

① から　$\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2+\sum_{k=1}^n\{a_k-(n-k+1)\}^2$

$$=2\sum_{k=1}^n a_k{}^2+\sum_{k=1}^n k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^n a_k+\sum_{k=1}^n(n-k+1)^2$$

$$=2\sum_{k=1}^n k^2+\sum_{k=1}^n k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^n k+\sum_{k=1}^n k^2$$

$$=4\sum_{k=1}^n k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^n k$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

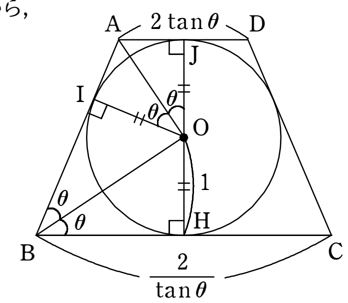
よって　$\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)-\sum_{k=1}^n\{a_k-(n-k+1)\}^2$

$\sum_{k=1}^n\{a_k-(n-k+1)\}^2\geqq0$ であるから，$\sum_{k=1}^n(a_k-k)^2$ は

$\sum_{k=1}^n\{a_k-(n-k+1)\}^2=0$ すなわち $a_k=n-k+1$ ($k=1$，2，……，n) のとき最大となり，$\sum_{k=1}^n ka_k$ は最小となる。このとき 1) より $\sum_{k=1}^n ka_k=S$ となるから，すべての数列 $\{a_k\}$ に対して $\sum_{k=1}^n ka_k\geqq S$ が成り立つ。

$\boxed{4}$ 1) 25 点　2) 5 点　計 30 点

1) O から辺 BC，AB，AD に下ろした垂線の足をそれぞれ H，I，J とすると，H，I，J は等脚台形と円の接点であるから，



$\mathrm{OH}=\mathrm{OI}=\mathrm{OJ}=1$

よって，△OBH において　$\mathrm{BH}=\frac{1}{\tan\theta}$

であるから　$\mathrm{BC}=2\mathrm{BH}=\frac{2}{\tan\theta}$

また，△OBH ≡ △OBI なので

$\angle\mathrm{OBH}=\angle\mathrm{OBI}=\theta$

よって，$\angle\mathrm{BOH}=\angle\mathrm{BOI}=\frac{\pi}{2}-\theta$

であるから　$\angle\mathrm{HOI}=2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\pi-2\theta$

また，3 点 H，O，J は同一直線上にあるので

$\angle\mathrm{IOJ}=\pi-\angle\mathrm{HOI}=\pi-(\pi-2\theta)=2\theta$

このことと，△OAI ≡ △OAJ より　$\angle\mathrm{AOI}=\angle\mathrm{AOJ}=\theta$

よって，△AOJ において　$\mathrm{AJ}=\tan\theta$

であるから　$\mathrm{AD}=2\mathrm{AJ}=2\tan\theta$

したがって，求める面積は

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\cdot\mathrm{JH}=\frac{1}{2}\left(2\tan\theta+\frac{2}{\tan\theta}\right)\cdot2=2\tan\theta+\frac{2}{\tan\theta}$$

2) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から $\tan\theta>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$S=2\tan\theta+\frac{2}{\tan\theta}\geqq2\sqrt{2\tan\theta\cdot\frac{2}{\tan\theta}}=4$$

等号が成り立つのは　$2\tan\theta=\frac{2}{\tan\theta}$　から $\tan^2\theta=1$

すなわち　$\tan\theta=1$ より $\theta=\frac{\pi}{4}$　のときである。

以上より，S は $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最小値 4 をとる。