$\boxed{1}$ 1) 5 点　2) 5 点　計 10 点

A，B，C の 3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

1) 出た目の積が偶数である確率

2) 出た目の積が 25 の倍数である確率

$\boxed{2}$ 15 点

光線があるガラス板を 1 枚通過するごとに，その強さの $\dfrac{11}{1000}$ を失うとする。光線の強さがもとの $\dfrac{1}{3}$ 以下になるのは，このガラス板を何枚以上通過したときか。常用対数表を用いて求めよ。

$\boxed{3}$ 1) 10 点　2) 15 点　計 25 点

△OAB において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，以下の問いに答えよ。

1) 線分 OP と線分 AQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

2) $|\vec{a}|=a$，$|\vec{b}|=b$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。△ROA が OA を底辺とする二等辺三角形となるための条件を，a，b，θ を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 25 点

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin x\cos x$$

$(0\leqq x<2\pi)$ とするとき，y のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ 25 点

放物線 $y=x(1-x)$ と直線 $y=m\ (m>0)$ が異なる 2 点 A，B で交わるとき，△OAB の面積が最大となる m の値およびそのときの面積を求めよ。ただし，O は原点とする。

$\boxed{1}$ 1) 5 点　2) 5 点　計 10 点

1) 目の出方の総数は 6^3（通り）

「出た目の積が偶数である」という事象の余事象は「出た目の積が奇数である」であり，出た目の積が奇数になるのは，3 個のさいころの目がすべて奇数のときである。

したがって，求める確率は

$$1-\frac{3^3}{6^3}=\frac{7}{8}$$

2) 出た目の積が 25 の倍数になるのは，3 個のさいころのうち少なくとも 2 個で 5 が出るときである。

2 個が 5，1 個が 5 以外となる目の出方は　${}_3C_2\times 5=15$（通り）

3 個とも 5 となる目の出方は　1 通り

したがって，求める確率は

$$\frac{15+1}{6^3}=\frac{2}{27}$$

$\boxed{2}$ 15 点

光線がガラス板 1 枚を通過するごとに，その光の強さは $1-\frac{11}{1000}=\frac{989}{1000}$（倍）になる。

よって，光線の強さがもとの $\frac{1}{3}$ 以下になるとすると　$\left(\frac{989}{1000}\right)^n\leqq\frac{1}{3}$

両辺の常用対数をとると　　$n\log_{10}\frac{989}{1000}\leqq\log_{10}\frac{1}{3}$

ゆえに　　$n(\log_{10}989-3)\leqq-\log_{10}3$

よって　　$n(\log_{10}9.89+2-3)\leqq-\log_{10}3$

ゆえに　　$n(0.9952-1)\leqq-0.4771$

よって　　$n\geqq\frac{4771}{48}=99.3\cdots\cdots$

したがって，光線の強さがもとの $\frac{1}{3}$ 以下になるのは，このガラス板を 100 枚以上通過したときである。

$\boxed{3}$ 1) 10 点　2) 15 点　計 25 点

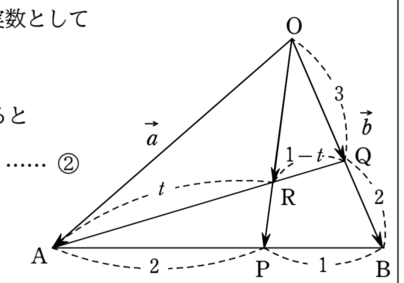
1) 条件より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

3 点 O，R，P は同一直線上にあるので，k を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}$ ……①

と表せる。また，AR：RQ$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{b}$ ……②



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるから，①，② より

$\frac{1}{3}k=1-t,\quad \frac{2}{3}k=\frac{3}{5}t$

これを解いて　$k=\frac{9}{13},\quad t=\frac{10}{13}$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3}{13}\vec{a}+\frac{6}{13}\vec{b}$

2) $|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=ab\cos\theta$

1) より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3}{13}(\vec{a}+2\vec{b})$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=\left(\frac{3}{13}\right)^2|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\left(\frac{3}{13}\right)^2(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$$
$$=\left(\frac{3}{13}\right)^2(a^2+4ab\cos\theta+4b^2)$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3}{13}\vec{a}+\frac{6}{13}\vec{b}-\vec{a}=-\frac{10}{13}\vec{a}+\frac{6}{13}\vec{b}=\frac{2}{13}(-5\vec{a}+3\vec{b})$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\left(\frac{2}{13}\right)^2|-5\vec{a}+3\vec{b}|^2=\left(\frac{2}{13}\right)^2(25|\vec{a}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2)$$
$$=\left(\frac{2}{13}\right)^2(25a^2-30ab\cos\theta+9b^2)$$

△ROA が OA を底辺とする二等辺三角形になるとき，OR＝AR より $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ となるので

$$\left(\frac{3}{13}\right)^2(a^2+4ab\cos\theta+4b^2)=\left(\frac{2}{13}\right)^2(25a^2-30ab\cos\theta+9b^2)$$

整理して　　$12ab\cos\theta=7a^2$

$a>0$，$b>0$ であるから，求める条件は　　$\cos\theta=\frac{7a}{12b}$

$\boxed{4}$ 25 点

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin x\cos x$$
$$=2\sin\frac{2x+\pi}{2}\cos\frac{-\frac{\pi}{3}}{2}+2\sqrt{3}\cos\frac{2x+\pi}{2}\cos\frac{\frac{4}{3}\pi}{2}+2\sin x\cos x$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{2}{3}\pi+2\sin x\cos x$$
$$=\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+2\sin x\cos x$$
$$=\sqrt{3}(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x$$

ここで $t=\sin x+\cos x$ とおくと

$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$　であるから　$2\sin x\cos x=t^2-1$

よって　$y=\sqrt{3}t+t^2-1=t^2+\sqrt{3}t-1=\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$

また $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であり，$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$ なので　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

したがって，y は

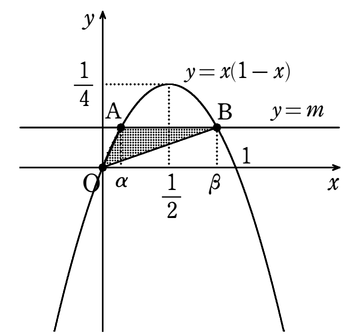
$t=\sqrt{2}$ で最大値 $\sqrt{6}+1$，$t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\frac{7}{4}$　をとる。

ゆえに，求める y の値の範囲は　　$-\frac{7}{4}\leqq y\leqq\sqrt{6}+1$

$\boxed{5}$ 25 点

$f(x)=x(1-x)$ とおくと　$f(x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

よって，$f(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。



ゆえに図より，放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=m$ が異なる 2 点で交わるとき，$m>0$ も考慮すると

$$0<m<\frac{1}{4}$$

A$(\alpha,\ m)$，B$(\beta,\ m)$ $(\alpha<\beta)$ とすると，α，β は

$x(1-x)=m$　すなわち　$x^2-x+m=0$

の実数解であるから，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=m$

したがって

$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4m$

$0<m<\frac{1}{4}$ のとき $1-4m>0$ であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{1-4m}$

よって，△OAB の面積を $g(m)$ とおくと

$$g(m)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot m=\frac{1}{2}m\sqrt{1-4m}$$

ゆえに　$g'(m)=\frac{1}{2}\sqrt{1-4m}+\frac{1}{2}m\cdot\frac{-4}{2\sqrt{1-4m}}=\frac{-6m+1}{2\sqrt{1-4m}}$

$g'(m)=0$ とすると　$-6m+1=0\iff m=\frac{1}{6}$

$g(m)$ の増減表は次のようになる。

m	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
$g'(m)$		$+$	0	$-$	
$g(m)$		↗	極大	↘	

よって，$g(m)$ は $m=\frac{1}{6}$ で極大かつ最大となり，その値は

$$g\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{36}$$

となるので，△OAB の面積は　$m=\frac{1}{6}$ で最大値 $\frac{\sqrt{3}}{36}$　をとる。