令和２年度　愛知医科大学　推薦入試　数学

Ⅰ．$4x^2+y^2=20$ であるとき，$\log_5 x+\log_5 y$ の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

（予想配点：15 点）

〔解答〕

真数は正なので $x>0$ かつ $y>0$ … ①

$4x^2+y^2=20$ より，$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}=1$ なので，$x=\sqrt{5}\sin\theta$，$y=2\sqrt{5}\cos\theta$ とおけるので

$$\begin{aligned}\log_5 x+\log_5 y &= \log_5 xy\\ &= \log_5(10\sin\theta\cos\theta)=\log_5(5\sin 2\theta)\\ &= 1+\log_5\sin 2\theta\end{aligned}$$

底 5 は 1 より大きいので，$\sin 2\theta$ が最大のとき，$\log_5 x+\log_5 y$ も最大となる。

$\sin 2\theta$ は　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi \iff \theta=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$（$n$ は整数）

のとき最大値 1 をとるので，$\log_5 x+\log_5 y$ の最大値は　$1+\log_5 1=1$

n が偶数のとき　$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　から

$$x=\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2},\quad y=2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10}$$

n が奇数のとき　$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　から

$$x=\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{2},\quad y=2\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{10}$$

であるから，①より

$x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，　$y=\sqrt{10}$ のとき 最大値 1　…（答）

【別解】

真数は正なので $x>0$ かつ $y>0$ … ①

また　$\log_5 x+\log_5 y=\log_5 xy$

$4x^2>0$，$y^2>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$4x^2+y^2 \geqq 2\sqrt{4x^2y^2}=4|xy|=4xy \quad (\because ①より)$$

よって　$20\geqq 4xy$　から　$xy\leqq 5$　　底 5 は 1 より大きいので　$\log_5 xy\leqq 1$

等号は $4x^2=y^2$ すなわち $2x=y$ のとき成り立つ。

このとき　$4x^2+(2x)^2=20$ より　$x^2=\dfrac{5}{2}$

①より　$x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　よって　$y=2\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$

したがって　$x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，　$y=\sqrt{10}$ のとき 最大値 1　…（答）

Ⅱ．3 点 $A(2,\ -1)$, $B(2\sqrt{6}-1,\ 2)$, $C(-4,\ 7)$ を通る円の方程式を求めよ。

（予想配点：10 点）

〔解答〕（円の方程式の一般形を利用）

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$

とおくと，通る点の条件より

$$5+2l-m+n=0 \quad \cdots ① \qquad 29-4\sqrt{6}+(2\sqrt{6}-1)l+2m+n=0 \quad \cdots ②$$

$$65-4l+7m+n=0 \quad \cdots ③$$

②－①から　$24-4\sqrt{6}+(2\sqrt{6}-3)l+3m=0 \quad \cdots ④$

③－①から　$60-6l+8m=0 \iff 30-3l+4m=0 \quad \cdots ⑤$

④×4－⑤×3 から　$6-16\sqrt{6}+(8\sqrt{6}-3)l=0 \iff (8\sqrt{6}-3)l=2(8\sqrt{6}-3)$

$$\iff l=2$$

よって，⑤から　$m=-6$

これらを①に代入して　$n=-15$

したがって，求める円の方程式は　$\underline{x^2+y^2+2x-6y-15=0}$ …（答）

【別解】（2 本の弦の垂直二等分線の交点が円の中心になることを利用）

線分 AC の中点の座標は $(-1,\ 3)$ であり, 2 点 A, C を通る直線の傾きは $-\dfrac{4}{3}$

よって，線分 AC の垂直二等分線の方程式は

$$y-3=\frac{3}{4}(x+1) \iff y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4} \quad \cdots ①$$

線分 AB の中点の座標は $\left(\sqrt{6}+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ であり, 2 点 A, B を通る直線の傾きは $\dfrac{3}{2\sqrt{6}-3}$

よって，線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y-3=\frac{3-2\sqrt{6}}{3}(x+1) \iff y=\frac{3-2\sqrt{6}}{3}x+\frac{12-2\sqrt{6}}{3} \quad \cdots ②$$

①，②の交点の座標は $(-1,\ 3)$ であり，これが求める円の中心の座標である。

円の半径は，中心と点 A の距離であるから

$$\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-1-3)^2}=5$$

したがって，求める円の方程式は　$\underline{(x+1)^2+(y-3)^2=25}$ …（答）

Ⅲ．2 個の抽選箱(イ), (ロ)を用意し，それぞれの箱には

(イ)：当たりが 2 本，はずれが 8 本

(ロ)：当たりが 3 本，はずれが 7 本

のくじを入れておき，(イ)→(ロ)→(イ)の順に，1 本ずつ合計 3 本のくじを引く。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

3 本のうち当たりが 1 本であったとき，そのくじが(ロ)から引いたものである確率を求めよ。

（予想配点：10 点）

〔解答〕

当たりが 1 本であるのは，次の 3 通りの場合がある。

[1] (イ)当たり→(ロ)はずれ→(イ)はずれ

[2] (イ)はずれ→(ロ)当たり→(イ)はずれ

[3] (イ)はずれ→(ロ)はずれ→(イ)当たり

よって，当たりが 1 本であるという事象を A とおくと

$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{56\cdot 7}{900}$$

であり，(ロ)から当たりくじを引くという事象を B とおくと

$$P(A\cap B)=\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{56\cdot 3}{900}$$

ゆえに，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{56\cdot 3}{900}\div\dfrac{56\cdot 7}{900}=\underline{\dfrac{3}{7}}$ …（答）

Ⅳ. 数列$\{a_n\}$において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。初項が 1 であって，$n \geqq 2$ のときは $S_n{}^2 = a_n(S_n - 1)$

であるとき，一般項 a_n を求めよ。（予想配点 : 20 点）

〔解答〕

$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから

$S_n{}^2 = a_n(S_n - 1)$ より $S_n{}^2 = (S_n - S_{n-1})(S_n - 1)$

$$\Leftrightarrow \quad S_n{}^2 = S_n{}^2 - S_n - S_n S_{n-1} + S_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{n-1} = S_n + S_n S_{n-1} \quad \cdots ① \quad (n \geqq 2)$$

①において $S_n = 0$ とすると $S_{n-1} = 0$ であるから，$S_n = 0$ となる n があると仮定すると

$$S_n = S_{n-1} = S_{n-2} = \cdots = S_1 = a_1 = 0$$

これは $a_1 = 1$ に矛盾する。

したがって，すべての自然数 n について $S_n \neq 0$

よって，①の両辺を $S_n S_{n-1}$ で割ると $\dfrac{1}{S_n} = \dfrac{1}{S_{n-1}} + 1 \quad (n \geqq 2)$

$\dfrac{1}{S_n} = T_n$ とおくと $T_n = T_{n-1} + 1 \quad (n \geqq 2)$ となるから，$n \geqq 1$ において数列$\{T_n\}$は，

初項 $T_1 = \dfrac{1}{S_1} = \dfrac{1}{a_1} = 1$，公差 1 の等差数列となる。

よって $T_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$ 　ゆえに $\dfrac{1}{S_n} = n$ から $S_n = \dfrac{1}{n}$

これを与式に代入すると $\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = a_n\left(\dfrac{1}{n} - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{n^2} = a_n \cdot \dfrac{1-n}{n} \quad (n \geqq 2)$

$n \geqq 2$ のとき $1 - n \neq 0$ であるから $a_n = \dfrac{1}{n(1-n)} \ (n \geqq 2)$

以上から $\underline{a_1 = 1, \quad n \geqq 2 \text{ のとき } a_n = \dfrac{1}{n(1-n)}}$ …（答）

V．$f(x)=x^4+4x^3+2x^2-2x+3$ とする。曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，異なる 2 点で接するものをℓとするとき，次の問いに答えよ。

1) 接点の座標の一つを$(\alpha, f(\alpha))$とし，ℓの方程式を $y=mx+n$ とする。このとき，整式 $P(x)=f(x)-mx-n$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ。

2) ℓの方程式を求めよ。

3) $y=f(x)$ とℓで囲まれた部分の面積Sを求めよ。

（予想配点：1) 15 点　2) 15 点　3) 15 点）

〔解答〕

1) ℓの傾きmは $m=f'(\alpha)$ であるから，ℓの方程式は

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad y=f'(\alpha)x+f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$$

よって，$n=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$ となり

$$P(x)=f(x)-f'(\alpha)x-f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$$

と表せる。

ここで，$P(x)$を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商を$Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b$$

であるから　$f(x)-f'(\alpha)x-f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b$ … ①

①において $x=\alpha$ を代入すると　$0=a\alpha+b$ … ②

次に，①の両辺をxで微分すると

$$f'(x)-f'(\alpha)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$$

となり，この式において $x=\alpha$ を代入すると　$0=a$ … ③

②，③より　$a=b=0$

ゆえに，$P(x)$は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる。

2) 接点の座標のうち，$(\alpha, f(\alpha))$ 以外のものを $(\beta, f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，1)より，$P(x)$は$(x-\alpha)^2$，$(x-\beta)^2$ の両方で割り切れるので，x^4の係数が 1 であることに注意すると

$$f(x)-mx-n=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

とかける。これに $f(x)=x^4+4x^3+2x^2-2x+3$ を代入し，右辺を展開して整理すると

$$x^4+4x^3+2x^2-(m+2)x+3-n$$
$$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$$

これがxの恒等式となればよいので

$-2(\alpha+\beta)=4$ … ④，　$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=2$ … ⑤

$2\alpha\beta(\alpha+\beta)=m+2$ … ⑥，　$\alpha^2\beta^2=3-n$ … ⑦

④より　$\alpha+\beta=-2$

⑤より　$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=2$　　よって $\alpha\beta=-1$

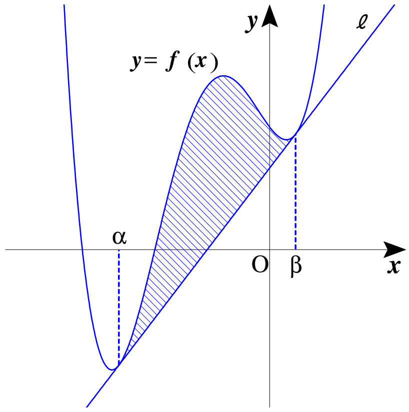
⑥より　$2\cdot(-1)\cdot(-2)=m+2$　　よって $m=2$

⑦より　$(-1)^2=3-n$　　よって $n=2$

したがって，ℓの方程式は　$\underline{y=2x+2}$ …（答）

3) 曲線　$y=f(x)$　の位置関係は右の図のようになる。

よって，求める面積は



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-(2x+2)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}^2dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^5}{5}-\frac{(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4}{2}+\frac{(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^5}{5}-\frac{(\beta-\alpha)^5}{2}+\frac{(\beta-\alpha)^5}{3}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^5}{30}$$

$$=\frac{\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{5}{2}}}{30}=\frac{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{5}{2}}}{30}=\frac{\{(-2)^2-4\cdot(-1)\}^{\frac{5}{2}}}{30}$$

$$=\frac{8^{\frac{5}{2}}}{30}=\frac{\sqrt{8^5}}{30}=\frac{128\sqrt{2}}{30}$$

$$=\underline{\frac{64\sqrt{2}}{15}}\quad\cdots\text{（答）}$$