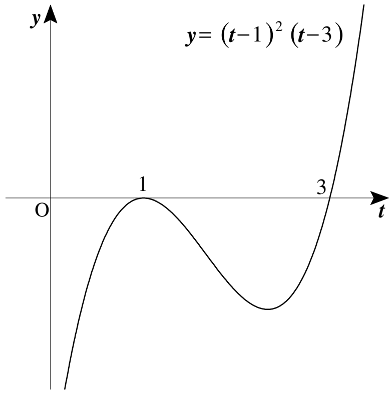
平成 28 年度　愛知医科大学　推薦入試　数学

Ⅰ．不等式 $3^{1-x}+5\cdot 3^x>7+9^x$ を解け。　（予想配点：10 点）

〔解答〕



$9^x=(3^x)^2$ であるから，不等式の両辺に $3^x(>0)$ をかけると

$$3+5\cdot(3^x)^2>7\cdot 3^x+(3^x)^3$$

$3^x=t$ とおいて整理すると

$$t^3-5t^2+7t-3<0 \quad\Leftrightarrow\quad (t-1)^2(t-3)<0$$

よって　$t<1,\ \ 1<t<3$

となるので　$3^x<1,\ \ 1<3^x<3$

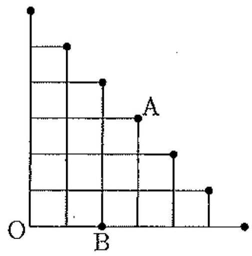
これを解いて　$\underline{x<0,\ \ 0<x<1}$ …（答）

Ⅱ．右の図の点 O から出発し，硬貨を投げて表なら上に，裏なら右に 1 目盛ずつ進むとき，次の問いに答えよ。

1)　点 A に到達する確率を求めよ。

2)　点 A に到達したとき，点 B 経由である確率を求めよ。

（予想配点：1) 10 点　2) 15 点）



〔解答〕

1)　上に 3 目盛，右に 3 目盛進めばよいので，6 回硬貨を投げて，表が 3 回，裏が 3 回出る確率を求めればよい。

よって，求める確率は　$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\underline{\frac{5}{16}}$$ …（答）

2)　点 A に到達するという事象を A，点 B を通るという事象を B とおく。

1) より，$P(A)=\dfrac{5}{16}$

点 B を経由して点 A に到達するという事象は $A\cap B$ で表され，その確率は，　O→B→A

と進む確率であるから　$$P(A\cap B)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$$

ゆえに，求める確率は　$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{16}\times\frac{16}{5}=\underline{\frac{1}{5}}$$ …（答）

Ⅲ．$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+1+\dfrac{n^2+3n}{2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

1) 一般項a_nを求めよ。

2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ の和を求めよ。　　（予想配点：1）15 点　2) 15 点）

〔解答〕

1) 数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項が $1+\dfrac{n^2+3n}{2}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k^2+3k}{2}\right) \\
&= 1+(n-1)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}n(n-1) \\
&= \frac{1}{12}n\{12+(n-1)(2n-1)+9(n-1)\} \\
&= \frac{1}{12}n(2n^2+6n+4) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}
$$

この式において $n=1$ とすると $a_1=\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$ となるので，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\underline{a_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$ …（答）

2) $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}=3\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} &= 3\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right] \\
&= 3\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}
\end{aligned}
$$

ゆえに，求める無限級数の和は

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}3\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=3\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{3}{2}} \quad \cdots（答）
$$

Ⅳ．座標平面上の 2 つの曲線 $C_1 : xy=1 \quad (x>0)$ と $C_2 : 4x^2+y^2=2$ について，曲線 C_1 と曲線 C_2 の両方に接する直線の方程式を求めよ。（予想配点：30 点）

〔解答〕

曲線 C_1 について，$xy=1$ から $y=\dfrac{1}{x}$ であるから，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ となる。

曲線 C_1 上の接点の座標を $\left(s, \dfrac{1}{s}\right) \ (s>0)$ とおくと，この点における曲線 C_1 の接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{s^2}(x-s)+\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}x+\frac{2}{s} \quad \cdots ①$$

とかける。この直線が曲線 C_2 にも接するので，①と曲線 C_2 の方程式から y を消去して

$$4x^2+\left(-\frac{1}{s^2}x+\frac{2}{s}\right)^2=2$$

整理して　$(4s^4+1)x^2-4sx+2s^2(2-s^2)=0$

この 2 次方程式が重解をもてばよいから，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4s^2-2s^2(4s^4+1)(2-s^2)=2s^2\{2-(4s^4+1)(2-s^2)\}=0$$

$s>0$ であるから　$2-(4s^4+1)(2-s^2)=0$

整理して　$4s^6-8s^4+s^2=0$

$s>0$ であるから　$4s^4-8s^2+1=0 \ \cdots ②$

$s^2=t \ (t>0)$ とおくと，②は　$4t^2-8t+1=0$　となるので　$t=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{4}$

ゆえに　$s^2=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{4}$　から　$s=\sqrt{\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}\pm1}{2}$（複号同順）

したがって，①にこれらの値を代入すると，求める直線の方程式は

$$\underline{y=-2(2-\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}-1), \quad y=-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)} \ \cdots（答）$$

【別解】

（〔解答〕の①を求めるところまでは同じ。）

①は　$\dfrac{1}{s}x+sy=2 \ \cdots ①'$　と変形できる。

次に，曲線 C_2 上の接点の座標を $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta\right) \ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，この点における曲線 C_2 の接線の方程式は

$$4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\cdot x+(\sqrt{2}\sin\theta)\cdot y=2$$

すなわち　$(2\sqrt{2}\cos\theta)x+(\sqrt{2}\sin\theta)y=2 \ \cdots ②$

①′と②が一致すればよいので

$$\frac{1}{s}=2\sqrt{2}\cos\theta,\quad s=\sqrt{2}\sin\theta$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}s},\quad \sin\theta=\dfrac{s}{\sqrt{2}}$　となる。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}s}\right)^2=1$

整理して　$4s^4-8s^2+1=0$　（以下,〔解答〕と同じ。）