平成 30 年度　愛知医科大学　推薦入試　数学

Ⅰ．箱の中に 1 から 9 までの番号を付けた 9 枚のカードが入っている。この中から 1 枚ずつ順に，合計 2 枚のカードを取り出すとき，2 枚目のカードの番号が素数である確率を求めよ。（予想配点：10 点）

〔解答〕

1 から 9 までの整数のうち，素数は 2, 3, 5, 7 の 4 つ，素数でない数は 1, 4, 6, 8, 9 の 5 つある。

2 枚目のカードの番号が 2, 3, 5, 7 のいずれかである確率を求めればよい。

[1] 1 枚目のカードの番号が素数のとき　$\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{12}{72}$

[2] 1 枚目のカードの番号が素数でないとき　$\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{20}{72}$

[1], [2]の事象は互いに排反であるから，求める確率は　$\dfrac{12}{72}+\dfrac{20}{72}=\dfrac{32}{72}=\underline{\dfrac{4}{9}}$　…（答）

Ⅱ．正の数 x, y が条件 $2^x=3^y$ をみたすとき，$x^2+\dfrac{1}{y^2}$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。（予想配点：15 点）

〔解答〕

条件式の両辺の, 2 を底とする対数をとると　$\log_2 2^x=\log_2 3^y \iff x=y\log_2 3$ … ①

よって　$x^2+\dfrac{1}{y^2}=(y\log_2 3)^2+\dfrac{1}{y^2}=(\log_2 3)^2y^2+\dfrac{1}{y^2}$

$y>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$(\log_2 3)^2y^2+\frac{1}{y^2}\geqq 2\sqrt{(\log_2 3)^2y^2\cdot\frac{1}{y^2}}=2\log_2 3 \quad (\because\ \log_2 3>0 \text{ より})$$

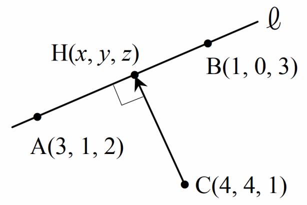
等号が成り立つ条件は　$\dfrac{1}{y^2}=\log_2 3 \iff y^2=\dfrac{1}{\log_2 3}$

$y>0$ から　$y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 3}}$　　このとき①から　$x=\dfrac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}}=\sqrt{\log_2 3}$

ゆえに　$\underline{x=\sqrt{\log_2 3},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 3}} \text{ のとき 最小値 } 2\log_2 3}$

Ⅲ．2 点 A(3, 1, 2), B(1, 0, 3)を通る直線をℓとする。点 C(4, 4, 1)からℓへ引いた垂線とℓとの交点を H とするとき, H の座標と線分 CH の長さを求めよ。（予想配点：15 点）

〔解答〕



H の座標を(x, y, z)とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(x-4,\ y-4,\ z-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,-1,1)$　であり, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2(x-4)-(y-4)+(z-1)=-2x-y+z+11=0\ \cdots\ ①$$

が成り立つ。

また, 3 点 A, B, H は同一直線上にあるので, 実数t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)(3,1,2)+t(1,0,3)=(3-2t,1-t,2+t)$$

と表せる。

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)$　であるから

$$x=3-2t,\quad y=1-t,\quad z=2+t$$

これを①に代入して

$$-2(3-2t)-(1-t)+(2+t)+11=0\quad\Leftrightarrow\quad 6t+6=0\quad\Leftrightarrow\quad t=-1$$

ゆえに　$x=5,\quad y=2,\quad z=1$　となるから, 点 H の座標は　$\underline{(5, 2, 1)}$ …（答）

このとき $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(1,-2,0)$　となるから

$$\mathrm{CH}=\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}=\underline{\sqrt{5}}\ \cdots\text{（答）}$$

Ⅳ．次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad \log a_{n+2}-2\log a_{n+1}+\log a_n=0\ (n\geqq 1),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}a_k=3$$

（予想配点 : 30 点）

〔解答〕

$b_n=\log a_n$ とおくと $b_1=\log a_1=0$ 　また $b_2=x$ とおく。

漸化式より $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0 \quad\Leftrightarrow\quad b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$

とかけるから，数列$\{b_{n+1}-b_n\}$は，初項 $b_2-b_1=x$，公比 1 の等比数列となる。

よって　$b_{n+1}-b_n=x$

したがって，数列$\{b_n\}$は，初項 0，公差xの等差数列となるので

$$b_n=x(n-1)$$

ゆえに　$a_n=e^{b_n}=e^{x(n-1)}=(e^x)^{n-1}$

となるので，数列$\{a_n\}$は，初項 1，公比e^xの等比数列である。

このとき　$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{e^{x(n-1)}}\sum_{k=1}^{n}(e^x)^{k-1}=\frac{1}{e^{x(n-1)}}\cdot\frac{1-e^{xn}}{1-e^x}=\frac{1}{1-e^x}\cdot\frac{1-e^{xn}}{e^{x(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{1-e^x}\cdot\frac{e^x(1-e^{xn})}{e^{xn}}=\frac{e^x}{1-e^x}(e^{-xn}-1)$$

であるから，これが収束するためにはe^{-xn}が収束すればよく，その条件は $x\geqq 0$

[1] $x=0$ のとき

$\lim_{n\to\infty}e^{-xn}=\lim_{n\to\infty}1=1$　であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{e^x}{1-e^x}(e^{-xn}-1)=0$ となり，条件を満たさない。

[2] $x>0$ のとき

$\lim_{n\to\infty}e^{-xn}=0$　であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{e^x}{1-e^x}(e^{-xn}-1)=\frac{e^x}{e^x-1}$

よって，条件より

$$\frac{e^x}{e^x-1}=3 \quad\Leftrightarrow\quad e^x=\frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x=\log\frac{3}{2}\ （x>0\text{ を満たす}）$$

ゆえに　$a_n=(e^x)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

[1], [2]より，求める数列の一般項は　$\underline{a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$ …（答）

V．$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ で定義された関数 $f(x)=\log(\sin x)$ について，次の問いに答えよ。

1) 曲線 $y=f(x)$ の増減，凹凸を調べ，グラフの概形をかけ。

2) 曲線 $y=f(x)$ の $\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ の部分の長さを求めよ。

（予想配点：1) 15 点　2) 15 点）

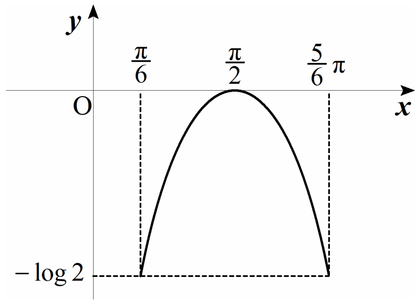
〔解答〕

1) $f'(x)=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 　より，$f'(x)=0$ とおくと $\cos x=0$ から $x=\dfrac{\pi}{2}$

$$f''(x)=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}<0$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$-\log 2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\log 2$



これより，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

2) 求める長さを L とおくと

$$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{1}{\sin x}\,dx$$

（$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より $\sin x>0$ なので $\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x}}=\dfrac{1}{|\sin x|}=\dfrac{1}{\sin x}$）

$t=\cos x$ とおくと $dt=-\sin x dx$ より $dx=-\dfrac{1}{\sin x}dt$

積分区間の対応は右のようになるので

x	$\dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{5}{6}\pi$
t	$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \to -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$L=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sin x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}dt\right)$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}dt$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1+t)(1-t)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=\Big[\log|1+t|-\log|1-t|\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\log(2+\sqrt{3})^2$$

$$=\underline{2\log(2+\sqrt{3})}\quad\cdots(\text{答})$$