$\boxed{1}$ 10 点

不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geqq \log_2 x-3$ を解け。

$\boxed{2}$ 25 点

中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 3 の円を C_1，中心 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 2 の円を C_2 とし，C_3 は次の条件を満たす円であるとする。

C_1 と C_3 は内接し，C_2 と C_3 は外接する。

このとき，C_3 の中心が描く軌跡を求めよ。

$\boxed{3}$ 15 点

10 枚の硬貨を 1 枚ずつ投げて，一列に並べていく。「表」「表」あるいは「裏」「裏」と，同じ面が連続で並んだ場合は，その時点でその 2 枚を列から除去し，さらに硬貨を並べていく。最終的に列に残っている硬貨が 8 枚である確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 25 点

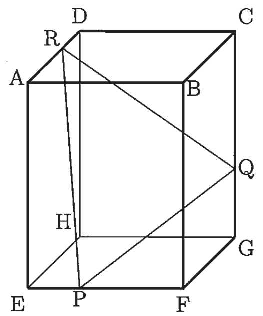
係数が実数である整式 $P(x)=x^{44}+ax^{33}+bx^{22}+cx^{11}+d$ が x^2+x+1 および x^2-x+1 で割り切れるとする。このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 25 点

$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AE}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AD}=\sqrt{2}$ の直方体 ABCD－EFGH がある。この直方体の辺上を 3 点 P，Q，R が次のように移動するものとする。

i)　点 P は E を出発点として到着点 F まで辺 EF 上を一定の速度で移動する。
ii)　点 Q は G を出発点として到着点 C まで辺 GC 上を一定の速度で移動する。
iii)　点 R は D を出発点として到着点 A まで辺 DA 上を一定の速度で移動する。
iv)　3 点 P，Q，R は各出発点を同時に出発し，各到着点に同時に到着する。

このとき，三角形 PQR の面積の最小値を求めよ。



$\boxed{1}$ 10 点

真数は正であるから

$x-2>0$ かつ $x-3>0$ かつ $x>0$　　すなわち　$x>3$ …… ①

不等式を変形すると

$$\frac{\log_2(x-2)}{\log_2\frac{1}{2}}+\frac{\log_2(x-3)}{\log_2\frac{1}{2}}\geqq \log_2 x-3$$

$\Leftrightarrow\quad \log_2 x+\log_2(x-2)+\log_2(x-3)\leqq 3$

$\Leftrightarrow\quad \log_2 x(x-2)(x-3)\leqq \log_2 8$

底 2 は 1 より大きいので　$x(x-2)(x-3)\leqq 8$

すなわち　$x^3-5x^2+6x-8\leqq 0$

よって　$(x-4)(x^2-x+2)\leqq 0$

ここで　$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$　であるから

$x-4\leqq 0\quad\Leftrightarrow\quad x\leqq 4$ …… ②

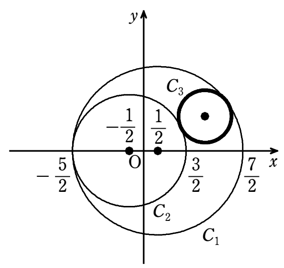
① と ② の共通範囲を求めて　$3<x\leqq 4$

$\boxed{2}$ 25 点

C_1 と C_2 の中心間距離は 1 であり　$1=3-2$

であるから，C_1 と C_2 は右の図のように内接し，

接点の座標は $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ である。



C_3 の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とおくと，

図より，(C_1の半径)>(C_3の半径) である。

C_1 と C_3 の中心間距離は　$\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2}$

なので，C_1 と C_3 が 内接することから　$\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2}=3-r$ …… ①

C_2 と C_3 の中心間距離は　$\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2}$

なので，C_2 と C_3 が外接することから　$\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2}=2+r$ …… ②

①+② から　$\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2}=5$

$\Leftrightarrow\quad \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2}=5-\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2}$

両辺を 2 乗して　$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2=25+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2-10\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow\quad 10\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2}=2a+25$

両辺を 2 乗して　$100\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2\right\}=4a^2+100a+625$

$\Leftrightarrow\quad 24a^2+25b^2=150$

ここで，$(a,\ b)=\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ のときは C_3 が円にならないので　$(a,\ b)\neq\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$

ゆえに，求める軌跡は　楕円 $24x^2+25y^2=150$，ただし $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ を除く。

$\boxed{3}$ 15 点

硬貨の表と裏の出方の総数は　$2^{10}=1024$（通り）

表を○，裏を×で表すことにすると，最終的に列に残っている硬貨が 8 枚であるような出方は，1 枚目の硬貨が表の場合は

○○×○×○×○×○，○○○×○×○×○×，○×××○×○×○×，
○×○○○×○×○×，○×○×××○×○×，○×○×○○○×○×，
○×○×○×××○×，○×○×○×○○○×，○×○×○×○×××，
○×○×○×○×○○

の 10 通りある。1 枚目の硬貨が裏の場合も同様に 10 通りあるので，求める確率は

$$\frac{10+10}{1024}=\frac{5}{256}$$

$\boxed{4}$ 25 点

$P(x)$ を x^2+x+1，x^2-x+1 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると

$P(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)$ …… ①，　$P(x)=(x^2-x+1)Q_2(x)$ …… ②

$x^2+x+1=0$ を満たす x を $x=\omega$ とすると

$\omega^2+\omega+1=0$ …… ③

であり，① より　$P(\omega)=0$ …… ④

③ の両辺に $\omega-1$ をかけると　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

すなわち　$\omega^3-1=0\quad\Leftrightarrow\quad\omega^3=1$ …… ⑤

よって，③，⑤ を用いると

$$\begin{aligned}P(\omega)&=\omega^{44}+a\omega^{33}+b\omega^{22}+c\omega^{11}+d\\&=(\omega^3)^{14}\omega^2+a(\omega^3)^{11}+b(\omega^3)^7\omega+c(\omega^3)^3\omega^2+d\\&=\omega^2+a+b\omega+c\omega^2+d\\&=-\omega-1+a+b\omega+c(-\omega-1)+d\\&=(b-c-1)\omega+a-c+d-1\end{aligned}$$

となるから，④ より　$(b-c-1)\omega+a-c+d-1=0$

③ から　$\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$　なので，ω は虚数であり，a，b，c，d は実数であるから

$b-c-1=0$ …… ⑥，　$a-c+d-1=0$ …… ⑦

次に，$x^2-x+1=0$ を満たす x を $x=\omega'$ とすると

$\omega'^2-\omega'+1=0$ …… ⑧

であり，② より　$P(\omega')=0$ …… ⑨

③ の両辺に $\omega'+1$ をかけると　$(\omega'+1)(\omega'^2-\omega'+1)=0$

すなわち　$\omega'^3+1=0\quad\Leftrightarrow\quad\omega'^3=-1$ …… ⑩

よって，⑧，⑩ を用いると

$$\begin{aligned}P(\omega')&=\omega'^{44}+a\omega'^{33}+b\omega'^{22}+c\omega'^{11}+d\\&=(\omega'^3)^{14}\omega'^2+a(\omega'^3)^{11}+b(\omega'^3)^7\omega'+c(\omega'^3)^3\omega'^2+d\\&=(-1)^{14}\omega'^2+a\cdot(-1)^{11}+b\cdot(-1)^7\omega'+c\cdot(-1)^3\omega'^2+d\\&=\omega'^2-a-b\omega'-c\omega'^2+d\\&=\omega'-1-a-b\omega'-c(\omega'-1)+d\\&=-(b+c-1)\omega'-a+c+d-1\end{aligned}$$

となるから，⑨ より　$-(b+c-1)\omega'-a+c+d-1=0$

⑧ から　$\omega'=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$　なので，ω' は虚数であり，a，b，c，d は実数であるから

$b+c-1=0$ …… ⑪，　$-a+c+d-1=0$ …… ⑫

⑥，⑦，⑪，⑫ を連立して解くと　$a=0,\ b=1,\ c=0,\ d=1$

$\boxed{5}$ 25 点

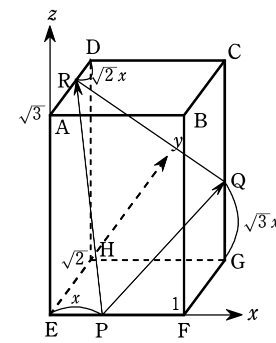
座標空間内で，E $(0,\ 0,\ 0)$，F $(1,\ 0,\ 0)$，H $(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，A $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ とする。

P，Q，R は各到着点に同時に到着することから，

$\mathrm{EP}=x$，$\mathrm{GQ}=\sqrt{3}x$，$\mathrm{DR}=\sqrt{2}x$ $(0\leqq x\leqq 1)$

とおける。このとき，P，Q，R の座標はそれぞれ

P $(x,\ 0,\ 0)$，Q $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}x)$，R $(0,\ \sqrt{2}(1-x),\ \sqrt{3})$



となるので　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}1-x\\\sqrt{2}\\\sqrt{3}x\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{pmatrix}-x\\\sqrt{2}(1-x)\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(1-x)^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2$

$=4x^2-2x+3$

$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=(-x)^2+\{\sqrt{2}(1-x)\}^2+(\sqrt{3})^2$

$=3x^2-4x+5$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-x(1-x)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(1-x)+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x$

$=x^2+2$

ゆえに，△PQR の面積を $S(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(4x^2-2x+3)(3x^2-4x+5)-(x^2+2)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{11x^4-22x^3+33x^2-22x+11}\\&=\frac{\sqrt{11}}{2}\sqrt{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\end{aligned}$$

$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$　とおくと

$f'(x)=4x^3-6x^2+6x-2=2(2x^3-3x^2+3x-1)=2(2x-1)(x^2-x+1)$

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$　であるから，$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{2}$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{9}{16}$	↗	1

したがって，$f(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{9}{16}$ をとる。

このとき $S(x)$ も最小となるので，求める最小値は　$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3\sqrt{11}}{8}$