$\boxed{1}$ 1) 10 点　2) 15 点　計 25 点

次の問いに答えよ。

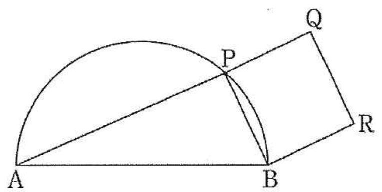
1) 次の 3 つの数を大きい順に並べよ。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_2 3},\quad 10^{\log_{\frac{1}{10}} 8},\quad 4^{-\log_2\sqrt{3}}$$

2) $a_1=3$，$a_2=\sqrt{a_1}$，$a_3=\sqrt{a_2}$，……，$a_n=\sqrt{a_{n-1}}$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 20 点

平面上に，線分 AB を直径とする半径 1 の半円がある。弧 AB 上の点 P に対して，線分 PB を 1 辺とする正方形 PBRQ を考える。ただし，点 P は A，B と異なる点とし，点 Q は線分 AP の P を超える延長上にとる。点 P が弧 AB 上を動くとき，線分 AR の長さの最大値を求めよ。



$\boxed{3}$ 15 点

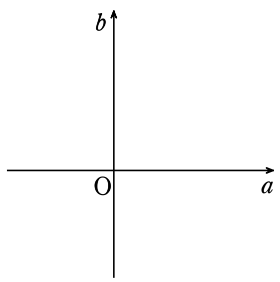
1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから，3 枚のカードを同時に引くとき，2 番目に大きい数が n $(2\leqq n\leqq 9)$ である確率を n を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 1) 20 点　2) 20 点　計 40 点

円 C は点 $(2, 1)$ を円の内部または周上に含み，かつ領域 $D=\{(x, y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ 内にある。このとき，次の問いに答えよ。

1) 円 C の中心 (a, b) の存在する範囲を求め，図示せよ。

2) 1) で求めた範囲の面積 S を求めよ。



$\boxed{1}$ 1) 10 点　2) 15 点　計 25 点

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\log_2 3}=2^{-2\log_2 3}=2^{\log_2 3^{-2}}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

$$10^{\log_{\frac{1}{10}}8}=10^{\frac{\log_{10}8}{\log_{10}\frac{1}{10}}}=10^{-\log_{10}8}=10^{\log_{10}8^{-1}}=8^{-1}=\frac{1}{8}$$

$$4^{-\log_2\sqrt{3}}=2^{-2\log_2\sqrt{3}}=2^{\log_2(\sqrt{3})^{-2}}=(\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{3}$$

$\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{8}>\dfrac{1}{9}$ であるから，大きい順に並べると　$4^{-\log_2\sqrt{3}}$ ，$10^{\log_{\frac{1}{10}}8}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\log_2 3}$

2) 条件から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ であるから，

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=\sqrt{a_{n-1}}$　の両辺の 3 を底とする対数をとると

$$\log_3 a_n=\log_3\sqrt{a_{n-1}}$$

すなわち　$\log_3 a_n=\dfrac{1}{2}\log_3 a_{n-1}$

よって，数列 $\{\log_3 a_n\}$ は，初項 $\log_3 a_1=\log_3 3=1$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\log_3 a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

ここで，$b_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ とおくと

$$\begin{aligned}\log_3 b_n&=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots\cdots+\log_3 a_n\\&=\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log_3 b_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

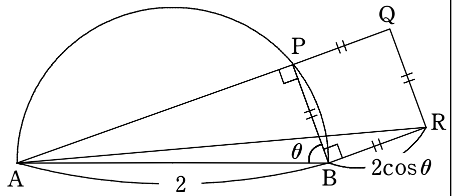
したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3^2=9$　　　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n=9$

$\boxed{2}$ 20 点

△ABP は，線分 AB を斜辺とする直角三角形であり，AB＝2 であるから，

∠ABP＝θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

BP＝$2\cos\theta$



四角形 PBRQ は正方形なので

BR＝BP＝$2\cos\theta$

∠ABR＝$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ であるから，△ABR

において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}^2&=2^2+(2\cos\theta)^2-2\cdot2\cdot2\cos\theta\cdot\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=4\cos^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+4\\&=4\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+8\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta+4\\&=4\sin2\theta+2\cos2\theta+6\\&=2\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)+6\end{aligned}$$

ただし，α は　$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす鋭角である。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha<2\theta+\alpha<\pi+\alpha$ であり，α は鋭角であるから，AR^2 は

$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$　で最大値 $2\sqrt{5}+6$ をとる。

AR>0 であるから，このとき AR も最大となるので，求める最大値は

$$\sqrt{2\sqrt{5}+6}=\sqrt{5}+1$$

$\boxed{3}$ 15 点

カードの取り出し方は全部で　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ (通り)

2 番目に大きい数が n になるのは，3 枚のカードが

n のカード

$n+1$ から 10 までの $(10-n)$ 枚のカードの中のいずれか 1 枚

1 から $n-1$ までの $(n-1)$ 枚のカードの中のいずれか 1 枚

になるときであるから，そのようなカードの取り出し方は　$(10-n)(n-1)$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{(10-n)(n-1)}{120}$

$\boxed{4}$ 1) 20 点　2) 20 点　計 40 点

1) A (2, 1)，C(a,b) とし，円 C の半径を $r\,(r>0)$ とすると，円 C が点 A を円の内部または周上に含むための条件は　AC$\leqq r$

よって　AC$^2\leqq r^2$　から　$(a-2)^2+(b-1)^2\leqq r^2$ …… ①

また，円 C が領域 D 内にあるための条件は

$a>0$，$b>0$，$a\geqq r$，$b\geqq r$

が同時に満たされることである。

$a\geqq r$ から　$r^2\leqq a^2$ であるから，これと ① から

$(a-2)^2+(b-1)^2\leqq a^2$　　よって　$a\geqq\dfrac{1}{4}(b-1)^2+1$ …… ②

$b\geqq r$ から　$r^2\leqq b^2$ であるから，これと ① から

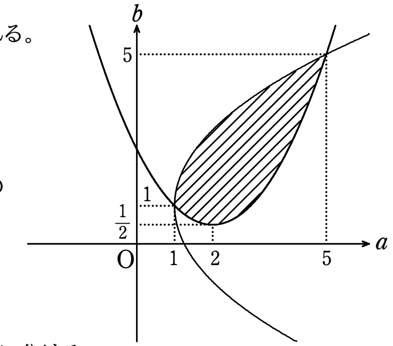
$(a-2)^2+(b-1)^2\leqq b^2$　　よって　$b\geqq\dfrac{1}{2}(a-2)^2+\dfrac{1}{2}$ …… ③

$\dfrac{1}{4}(b-1)^2+1>0$　より，② は $a>0$ に含まれる。

$\dfrac{1}{2}(a-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$　より，③ は $b>0$ に含まれる。

ゆえに，求める範囲は ② かつ ③ で表される領域であるから，図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



2) 1) で求めた範囲を xy 平面上で考える。2 つの放物線 $x=\dfrac{1}{4}(y-1)^2+1$ と $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}$

の共有点の座標は　(1, 1)，(5, 5)

であり，この 2 点を通る直線の方程式は $y=x$

である。1) で求めた領域を，直線 $y=x$ で 2 つに分ける。

放物線 $x=\dfrac{1}{4}(y-1)^2+1$ と，直線 $y=x$ によって囲まれる図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_1^5\left[y-\left\{\frac{1}{4}(y-1)^2+1\right\}\right]dy&=\int_1^5\left\{(y-1)-\frac{1}{4}(y-1)^2\right\}dy\\&=\left[\frac{1}{2}(y-1)^2-\frac{1}{12}(y-1)^3\right]_1^5\\&=8-\frac{16}{3}\\&=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

放物線 $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}$ と，直線 $y=x$ によって囲まれる図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_1^5\left[x-\left\{\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}\right\}\right]dx&=\int_1^5\left(-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}\right)dx\\&=\int_1^5-\frac{1}{2}(x-1)(x-5)dx\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(5-1)^3\\&=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

ゆえに，求める面積は　　$S=\dfrac{8}{3}+\dfrac{16}{3}=8$