平成２９年度　愛知医科大学　推薦入試　数学

Ⅰ．12 個のお菓子すべてを 4 名で分ける。ただし, 12 個のお菓子は区別できないものとし，もらう個数は異なっていてもよいこととする。

1)　1 個ももらわない人がいても構わない場合，お菓子の分け方は何通りあるか。

2)　各人が必ず 1 個はもらう場合，お菓子の分け方は何通りあるか。

（予想配点：1) 10 点　2) 10 点）

〔解答〕

1)　12 個の○と 3 個の｜を一列に並べる方法の総数を求めればよいので

$$\frac{15!}{12!3!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1}=\underline{455\ （通り）}\ \cdots（答）$$

〔別解〕

異なる 4 個のものから重複を許して 12 個をとってくる重複組合せの数より

$${}_4H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455\ （通り）$$

2) あらかじめお菓子を 1 個ずつ 4 名に与えたのち，残りの 8 個を 4 人に分ければよい。このとき，1 個もお菓子をもらわない人がいても構わない。よって, 8 個の○と 3 個の｜を一列に並べる総数を求めればよいので

$$\frac{11!}{8!3!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1}=\underline{165\ （通り）}\ \cdots（答）$$

【別解】

異なる 4 個のものから重複を許して 8 個をとってくる重複組合せの数より

$${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165\ （通り）$$

Ⅱ．関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ を導関数の定義に従って微分せよ。（予想配点：15 点）

〔解答〕

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+h}{\sqrt{x+h+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+h}{\sqrt{x+h+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sqrt{x+1}-x\sqrt{x+h+1}}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2(x+1)-x^2(x+h+1)}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}\{(x+h)\sqrt{x+1}+x\sqrt{x+h+1}\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\{x^2+(h+2)x+h\}}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}\{(x+h)\sqrt{x+1}+x\sqrt{x+h+1}\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+(h+2)x+h}{\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}\{(x+h)\sqrt{x+1}+x\sqrt{x+h+1}\}}$$

$$=\frac{x(x+2)}{(x+1)\cdot 2x\sqrt{x+1}}=\underline{\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}}\ \cdots（答）$$

Ⅲ．次の 2 つの式をみたす整式 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

$$f(x)+\int_1^x g(t)dt=\frac{5}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)g(x)=6x^2-x-2$$

（予想配点：30 点）

〔解答〕

$f(x)+\int_1^x g(t)dt=\frac{5}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$ … ①　　$f'(x)g(x)=6x^2-x-2$ … ②　とする。

①の両辺を x で微分すると

$$f'(x)+g(x)=5x-1 \iff f'(x)=5x-1-g(x) \quad \cdots ③$$

これを②に代入すると

$$\{5x-1-g(x)\}g(x)=6x^2-x-2 \iff \{g(x)\}^2-(5x-1)g(x)+(3x-2)(2x+1)=0$$
$$\iff \{g(x)-(3x-2)\}\{g(x)-(2x+1)\}=0$$

よって　$g(x)=3x-2$　または　$g(x)=2x+1$

[1]　$g(x)=3x-2$　のとき

③より　$f'(x)=2x+1$

よって　$f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C_1$（$C_1$ は積分定数）

ここで，①に　$x=1$　を代入すると　$f(1)=1$　であるから　$2+C_1=1 \iff C_1=-1$

ゆえに　$f(x)=x^2+x-1$

[2]　$g(x)=2x+1$　のとき

③より　$f'(x)=3x-2$

よって　$f(x)=\int(3x-2)dx=\frac{3}{2}x^2-2x+C_2$（$C_2$ は積分定数）

$f(1)=1$　であるから　$-\frac{1}{2}+C_2=1 \iff C_2=\frac{3}{2}$

ゆえに　$f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$

[1], [2]　より　$f(x)=x^2+x-1$，$g(x)=3x-2$　または　$f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$，$g(x)=2x+1$　…（答）

Ⅳ. 平面上の原点 $\mathrm{P}_0\ (0,\ 0)$ を出発し，点 $\mathrm{P}_1\ (1,\ 1)$ まで直進し P_1 で反時計回りに角度 $\dfrac{\pi}{2}$ だけ向きを変え，$t\,\overline{\mathrm{P_0P_1}}$ だけ直進した点を P_2 とする。ただし，$0<t<1$ であり，$\overline{\mathrm{P_0P_1}}$ は線分 $\mathrm{P_0P_1}$ の長さとする。次に P_2 で反時計回りに角度 $\dfrac{\pi}{2}$ だけ向きを変え，$t\,\overline{\mathrm{P_1P_2}}$ だけ直進した点を P_3 とする。このようにして次々に $\mathrm{P}_n\,(x_n,\,y_n)\,(n=0,1,2,\ldots)$ を定めるとき，次の問いに答えよ。

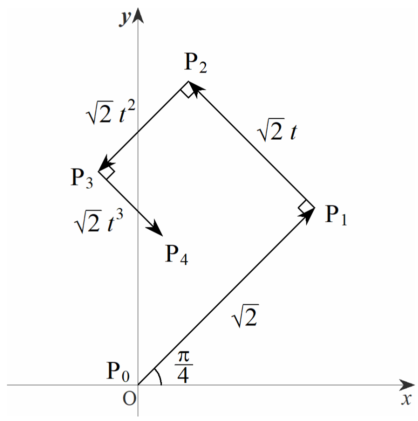
1) $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ の座標を求めよ。

2) 数列の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{4n}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_{4n}$ を求めよ。　　（予想配点：1) 5 点×3　2) 10 点×2）

〔解答〕

1) $\overline{\mathrm{P_0P_1}}=\sqrt{2}$ であり，直線 $\mathrm{P_0P_1}$ が, x 軸の正の向きとなす角は $\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\sqrt{2}t\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sqrt{2}t\left(-\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{\pi}{4}\right)=(-t,\ t)$$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}=\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}+\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(1,1)+(-t,\ t)=(1-t,\ 1+t)$

であるから, P_2 の座標は $\underline{(1-t,\ 1+t)}$ …（答）

同様に　$$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}=\sqrt{2}t^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}t^2\left(-\cos\frac{\pi}{4},\ -\sin\frac{\pi}{4}\right)=(-t^2,\ -t^2)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_3}}=\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}+\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}=(1-t,\ 1+t)+(-t^2,\ -t^2)=(1-t-t^2,\ 1+t-t^2)$

であるから, P_3 の座標は $\underline{(1-t-t^2,\ 1+t-t^2)}$ …（答）

さらに　$$\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}=\sqrt{2}t^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sqrt{2}t^3\left(\sin\frac{\pi}{4},\ -\cos\frac{\pi}{4}\right)=(t^3,\ -t^3)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_4}}=\overrightarrow{\mathrm{P_0P_3}}+\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}=(1-t-t^2,\ 1+t-t^2)+(t^3,\ -t^3)=(1-t-t^2+t^3,\ 1+t-t^2-t^3)$

であるから, P_4 の座標は $\underline{(1-t-t^2+t^3,\ 1+t-t^2-t^3)}$ …（答）

2) 1)と同様に考えると，k を 0 以上の整数として

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k}\mathrm{P}_{4k+1}}=\sqrt{2}t^{4k}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 4k\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 4k\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}t^{4k}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)=\sqrt{2}t^{4k}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=t^{4k}(1,1)=t^{4k}\,\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k+1}\mathrm{P}_{4k+2}}=\sqrt{2}t^{4k+1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot(4k+1)\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot(4k+1)\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}t^{4k+1}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right),\ \sin\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)\right)=\sqrt{2}t^{4k+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=t^{4k}(-t,t)=t^{4k}\,\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k+2}\mathrm{P}_{4k+3}}=\sqrt{2}t^{4k+2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot(4k+2)\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot(4k+2)\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}t^{4k+2}\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right),\ \sin\left(\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}t^{4k+2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=t^{4k}(-t^2,\ -t^2)=t^{4k}\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k+3}\mathrm{P}_{4k+4}}=\sqrt{2}t^{4k+3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot(4k+3)\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot(4k+3)\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}t^{4k+3}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right),\ \sin\left(\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}t^{4k+3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=t^{4k}(t^3,\ -t^3)=t^{4k}\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k}\mathrm{P}_{4k+4}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k}\mathrm{P}_{4k+1}}+\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k+1}\mathrm{P}_{4k+2}}+\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k+2}\mathrm{P}_{4k+3}}+\overrightarrow{\mathrm{P}_{4k+3}\mathrm{P}_{4k+4}}$$
$$=t^{4k}(\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}+\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}+\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4})$$
$$=t^{4k}(1-t-t^2+t^3,\ 1+t-t^2-t^3)=t^{4k}(x_4,\ y_4)$$

となるので　$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{4n}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_4}+\overrightarrow{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_8}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{P}_{4n-4}\mathrm{P}_{4n}}=(x_4,\ y_4)+t^4(x_4,\ y_4)+\cdots+t^{4(n-1)}(x_4,\ y_4)$

$$=(\{1+t^4+\cdots+t^{4(n-1)}\}x_4,\ \{1+t^4+\cdots+t^{4(n-1)}\}y_4)$$
$$=\left(\frac{1-t^{4n}}{1-t^4}x_4,\ \frac{1-t^{4n}}{1-t^4}y_4\right)$$

したがって　$x_{4n}=\dfrac{1-t^{4n}}{1-t^4}x_4$，　$y_{4n}=\dfrac{1-t^{4n}}{1-t^4}y_4$

$0<t<1$ より $0<t^4<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}t^{4n}=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}x_{4n}=\dfrac{1}{1-t^4}x_4=\dfrac{1-t-t^2+t^3}{1-t^4}=\dfrac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)(1+t)(1-t)}=\underline{\dfrac{1-t}{1+t^2}}$　…（答）

$$\lim_{n\to\infty}y_{4n}=\frac{1}{1-t^4}y_4=\frac{1+t-t^2-t^3}{1-t^4}=\frac{(1+t)^2(1-t)}{(1+t^2)(1+t)(1-t)}=\underline{\frac{1+t}{1+t^2}}\quad\cdots（答）$$