$\boxed{1}$ 1) 5点　2) 6点　3) 4点　計15点

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として，次の問いに答えよ。

1) 8^{2021} は何桁の整数か。

2) 8^{2021} の最高位の数字は何か。

3) 8^{2021} の一の位の数字は何か。

$\boxed{2}$ 15点

Aさんは，訪問先を訪ねると $\dfrac{1}{9}$ の確率で傘を忘れてきてしまう。ある日，傘を１本持って出発したAさんが 20 か所の訪問先を回り帰宅したとき，傘を忘れてきたことに気づいた。偶数番目のいずれかの訪問先に傘を忘れてきた確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 15点

関数 $y = 3\cos 2x + 2\cos x(4\tan x + \cos x) - 3$ の定義域と値域を求めよ。

$\boxed{4}$ 20点

a, b を相異なる実数とする。２つの関数

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3bx + a, \qquad g(x) = bx^3 + 3ax^2 + 3ax + b$$

のうち少なくとも一方は極値をもつことを示せ。

$\boxed{5}$ 1) 15点　2) 20点　計35点

四面体 OABC について，次の問いに答えよ。

1) この四面体の各頂点とそれらの対面の三角形の重心を結ぶ４本の線分は，１点で交わることを示せ。

2) 1) で示された交点を G とする。この四面体が正四面体であるとき，$\cos\angle\mathrm{OGA}$ の値を求めよ。

□1 1)5点　2)6点　3)4点　計15点

1) $\log_{10}8^{2021}=2021\log_{10}2^3=6063\log_{10}2=1824.963$

よって　$1824<\log_{10}8^{2021}<1825$　より　$10^{1824}<8^{2021}<10^{1825}$

であるから，8^{2021} は1825桁の整数である。

2) 1)より　$8^{2021}=10^{1824.963}=10^{0.963}\times10^{1824}$

$\log_{10}9=\log_{10}3^2=2\log_{10}3=0.9542$，$\log_{10}10=1$

であるから　$\log_{10}9<0.963<\log_{10}10 \iff 9<10^{0.963}<10$

したがって　$9\times10^{1824}<8^{2021}<10\times10^{1824}$

ゆえに，8^{2021} の最高位の数字は　9

3) 8^1，8^2，8^3，8^4，8^5，…… の一の位の数字は，順に

8，4，2，6，8，……

となり，4つの数字 8，4，2，6 が繰り返し現れる。

$2021=4\times505+1$ であるから，8^{2021} の一の位の数字は　8

□2 15点

20か所の訪問先のいずれかに傘を忘れてくるという事象は，20か所の訪問先のいずれにも傘を忘れてこないという事象の余事象であるから，その確率は

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^{20}$$

k を自然数として，$2k$ 番目の訪問先に傘を忘れてくる確率は

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{2k-1}\cdot\frac{1}{9}$$

であるから，偶数番目のいずれかの訪問先に傘を忘れてくる確率は

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{8}{9}\right)^{2k-1}\cdot\frac{1}{9}=\sum_{k=1}^{10}\frac{8}{81}\left(\frac{64}{81}\right)^{k-1}=\frac{\frac{8}{81}\left\{1-\left(\frac{64}{81}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{64}{81}}=\frac{8}{17}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{20}\right\}$$

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{\frac{8}{17}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{20}\right\}}{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{20}}=\dfrac{8}{17}$

□3 15点

$\cos x$，$\cos 2x$ はすべての実数 x に対して定義される。

$\tan x$ は $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$（$n$ は整数）を満たす実数 x に対して定義される。

よって，y の定義域は　$x\neq\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$（$n$ は整数）

$$\begin{aligned}y&=3\cos2x+2\cos x(4\tan x+\cos x)-3\\&=3(1-2\sin^2x)+2\cos x\left(4\cdot\frac{\sin x}{\cos x}+\cos x\right)-3\\&=-6\sin^2x+8\sin x+2\cos^2x\\&=-6\sin^2x+8\sin x+2(1-\sin^2x)\\&=-8\sin^2x+8\sin x+2\\&=-8\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+4\end{aligned}$$

$x\neq\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$（$n$ は整数）のとき　$-1<\sin x<1$

$\sin x=-1$ のとき　$y=-8-8+2=-14$　であるから，y の値域は　$-14<y\leqq4$

□4 20点

$f'(x)=3ax^2+6bx+3b=3(ax^2+2bx+b)$

$g'(x)=3bx^2+6ax+3a=3(bx^2+2ax+a)$

[1] $a=0$ または $b=0$ のとき

$f(x)$ と $g(x)$ の一方は2次関数，一方は3次関数となる。

すべての2次関数は極値をもつので，題意は成り立つ。

[2] $a\neq0$ かつ $b\neq0$ のとき

$f(x)$ と $g(x)$ がともに極値をもたないと仮定すると，$f'(x)=0$ と $g'(x)=0$ がともに実数解をもたないか，重解をもつ。このとき

$f'(x)=0 \iff ax^2+2bx+b=0$ の判別式を D_1

$g'(x)=0 \iff bx^2+2ax+a=0$ の判別式を D_2

とすると　$\dfrac{D_1}{4}\leqq0$　かつ　$\dfrac{D_2}{4}\leqq0$　である。

$\dfrac{D_1}{4}=b^2-ab=-b(a-b)$，　$\dfrac{D_2}{4}=a^2-ab=a(a-b)$

であるから　$-b(a-b)\leqq0$　かつ　$a(a-b)\leqq0$

すなわち　$b(a-b)\geqq0$　かつ　$a(a-b)\leqq0$

$a\neq0$ かつ $b\neq0$ であることと，$a\neq b$ より $a-b\neq0$ であることに注意すると

(i) $a-b>0$ のとき

$b>0$ かつ $a<0$　となるが，このとき $a-b<0$ となり，$a-b>0$ と矛盾する。

(ii) $a-b<0$ のとき

$b<0$ かつ $a>0$　となるが，このとき $a-b>0$ となり，$a-b<0$ と矛盾する。

したがって，$f'(x)=0$ と $g'(x)=0$ の少なくとも一方は異なる2つの実数解をもつので，$f(x)$ と $g(x)$ の少なくとも一方は極値をもつ。

[1]，[2] より，$f(x)$ と $g(x)$ の少なくとも一方は極値をもつ。

□5 1)15点　2)20点　計35点

1) △ABC，△OBC，△OAC，△OAB の重心をそれぞれ P，Q，R，S とすると

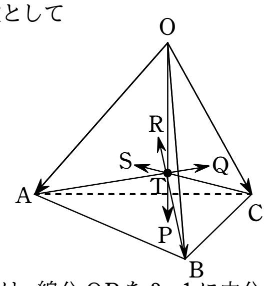
$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

線分 OP と線分 AQ が点 T で交わるとすると，k，t を実数として

$\overrightarrow{OT}=k\overrightarrow{OP}=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$　……　①

$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{t}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{t}{3}\overrightarrow{OC}$　……　②



$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから，①，②より

$\frac{k}{3}=1-t$，　$\frac{k}{3}=\frac{t}{3}$　　よって　$k=t=\frac{3}{4}$

したがって　$\overrightarrow{OT}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OP}$　であるから，線分 OP と線分 AQ は，線分 OP を 3：1 に内分する点で交わる。

同様にして，線分 OP と線分 BR，線分 OP と線分 CS も，線分 OG を 3：1 に内分する点で交わる。

ゆえに，線分 OP，AQ，BR，CS は，線分 OP を 3：1 に内分する点で交わる。

参考　点 T を，「四面体 OABC の重心」という。

2) 1)の点 T が G であるから　$\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

正四面体の1辺の長さを a とすると

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=a\cdot a\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}a^2$$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$　であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2&=\frac{1}{9}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{9}\left(a^2+a^2+a^2+2\cdot\frac{1}{2}a^2+2\cdot\frac{1}{2}a^2+2\cdot\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{2}{3}a^2\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{6}}{3}a$　であるから，OG：GP＝3：1　より

$$|\overrightarrow{OG}|=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

また　$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{4}(-3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AG}|^2&=\frac{1}{16}(9|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-6\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-6\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{16}\left(9a^2+a^2+a^2-6\cdot\frac{1}{2}a^2+2\cdot\frac{1}{2}a^2-6\cdot\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{3}{8}a^2\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{AG}|=\frac{\sqrt{6}}{4}a$

したがって，△OAG において余弦定理より

$$\cos\angle OGA=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}a\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}a}=-\frac{1}{3}$$

補足　正四面体の対称性から，ただちに OG＝AG としてもよい。