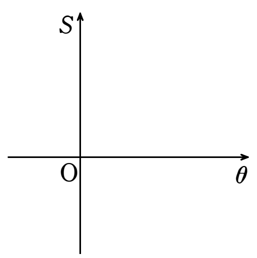
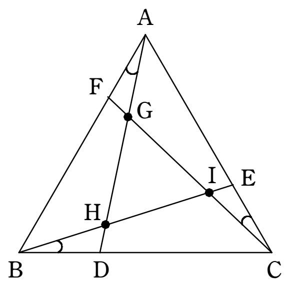
$\boxed{1}$ 20 点
正の数 x, y, z が $2^x=3^y=5^z$ を満たすとき，$2x$, $3y$, $5z$ を小さいほうから順に並べよ。

$\boxed{2}$ 25 点
座標平面上の 25 個の点 (i, j) $(i, j=1, 2, 3, 4, 5)$ から 3 点を選んでできる三角形の個数を求めよ。

$\boxed{3}$ 25 点
点 $(1, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，x 軸と y 軸および円 C_1 に接する円のうち，その半径が C_1 の半径 1 より小さい円を C_2 とする。さらに，x 軸と y 軸および円 C_2 に接する円のうち，その半径が C_2 の半径より小さい円を C_3 とする。以下同様の操作を無限に続けることにより得られる円を順に C_4, C_5, ……, C_n, …… とするとき，すべての円 C_1, C_2, ……, C_n, …… の面積の総和を求めよ。

$\boxed{4}$ 30 点
図のように，1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の各辺上に $\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{FCA}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$ となるような点 D, E, F をとる。線分 AD, BE, CF で囲まれた三角形 GHI の面積 S を θ を用いて表し，そのグラフをかけ。





$\boxed{1}$ 20 点

$2^x=3^y=5^z$ の各辺の常用対数をとり，その値を k とすると

$$x\log_{10}2=y\log_{10}3=z\log_{10}5=k\ (>0)$$

ゆえに　$x=\dfrac{k}{\log_{10}2}$，$y=\dfrac{k}{\log_{10}3}$，$z=\dfrac{k}{\log_{10}5}$

$$2x-3y=\frac{2k}{\log_{10}2}-\frac{3k}{\log_{10}3}=\frac{k(\log_{10}9-\log_{10}8)}{\log_{10}2\log_{10}3}>0$$

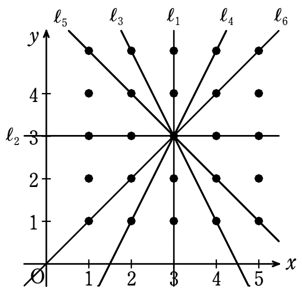
$$5z-2x=\frac{5k}{\log_{10}5}-\frac{2k}{\log_{10}2}=\frac{k(\log_{10}32-\log_{10}25)}{\log_{10}5\log_{10}2}>0$$

よって　$3y<2x<5z$

$\boxed{2}$ 25 点

25 個の交点から 3 個を選ぶ方法は

$${}_{25}C_3 \text{ 通り} \quad \cdots\cdots ①$$



右図のように直線 ℓ_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を定めると，① の ${}_{25}C_3$ 通りのうち，3 点で三角形ができないのは，3 点が次の直線上にある場合である。

[1]　3 点が ℓ_1 上または ℓ_1 と平行な直線上にあるとき

このような直線は 5 本あり，各直線に対して 3 点の選び方は ${}_5C_3$ 通りずつある。

よって，[1] の場合の 3 点の選び方は

$$5\times{}_5C_3=5\times{}_5C_2=5\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=5\times10=50\ (\text{通り})$$

[2]　3 点が ℓ_2 上または ℓ_2 と平行な直線上にあるとき

[1] と同様にして　　$5\times{}_5C_3=50$（通り）

[3]　3 点が ℓ_3 上または ℓ_3 と平行な直線上にあるとき

[1] と同様にして

$$3\times{}_3C_3=3\ (\text{通り})$$

[4]　3 点が ℓ_4 上または ℓ_4 と平行な直線上にあるとき

[3] と同じで　　3 通り

[5]　3 点が ℓ_5 上または ℓ_5 と平行な直線上にあるとき

$${}_5C_3+2\times({}_4C_3+{}_3C_3)=10+2\times5=20\ (\text{通り})$$

[6]　3 点が ℓ_6 上または ℓ_6 と平行な直線上にあるとき

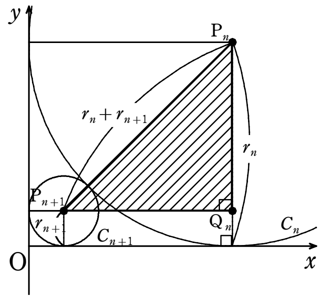
[5] と同じで　　20 通り

したがって，求める三角形の個数は

$${}_{25}C_3-(50+50+3+3+20+20)=\frac{25\cdot24\cdot23}{3\cdot2\cdot1}-146=2300-146=2154\ (\text{個})$$

$\boxed{3}$ 25 点

円 C_n の中心を P_n，半径を r_n とすると，円 C_n と円 C_{n+1} は外接するので



$$P_nP_{n+1}=r_n+r_{n+1}$$

また，右の図のように Q_n をとると

$$P_nQ_n=r_n-r_{n+1}$$

また，題意の円の中心はすべて直線 $y=x$ 上にあるので　$\angle P_nP_{n+1}Q_n=45^\circ$

よって，$\triangle P_nP_{n+1}Q_n$ は直角二等辺三角形となるから

$$P_nP_{n+1}=\sqrt{2}\,P_nQ_n$$

したがって　$r_n+r_{n+1}=\sqrt{2}(r_n-r_{n+1})$

整理して　　$r_{n+1}=(3-2\sqrt{2})r_n$

また，題意より　$r_1=1$

ゆえに，数列 $\{r_n\}$ は，初項 1，公比 $3-2\sqrt{2}$ の等比数列であるから

$$r_n=(3-2\sqrt{2})^{n-1}$$

よって，円 C_n の面積を S_n とすると

$$S_n=\pi r_n{}^2=\pi\{(3-2\sqrt{2})^{n-1}\}^2=\pi(17-12\sqrt{2})^{n-1}$$

となるから，数列 $\{S_n\}$ は，初項 π，公比 $17-12\sqrt{2}$ の等比数列である。

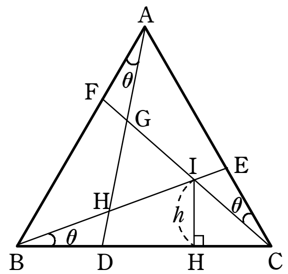
$17-12\sqrt{2}=17-\sqrt{288}$ であり，$16<\sqrt{288}<17$ であるから　$0<17-12\sqrt{2}<1$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束するので，求める面積の総和は

$$\frac{\pi}{1-(17-12\sqrt{2})}=\frac{\pi}{4(3\sqrt{2}-4)}=\frac{3\sqrt{2}+4}{8}\pi$$

$\boxed{4}$ 30 点

点 I から辺 BC に下ろした垂線と BC との交点を H とし，IH$=h$ とおく。



$\triangle$IBH において　　$\tan\theta=\dfrac{h}{\mathrm{BH}}$

よって　　$\mathrm{BH}=\dfrac{h}{\tan\theta}$

$\triangle$ICH において，$\angle\mathrm{ICH}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$ であるから

$$\mathrm{CH}=\frac{h}{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$$

BH＋CH＝1 であるから

$$\frac{h}{\tan\theta}+\frac{h}{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=1$$

分母を払って　　$h\left\{\tan\theta+\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}=\tan\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

よって　　$h=\dfrac{\tan\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}{\tan\theta+\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$

ここで　　$\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\theta}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

ゆえに　　$h=\dfrac{\tan\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}}{\tan\theta+\dfrac{\sqrt{3}-\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}}=\dfrac{\tan\theta(\sqrt{3}-\tan\theta)}{\tan\theta(1+\sqrt{3}\tan\theta)+(\sqrt{3}-\tan\theta)}$

$$=\frac{\tan\theta(\sqrt{3}-\tan\theta)}{\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)}$$

$\triangle\mathrm{HAB}\equiv\triangle\mathrm{IBC}\equiv\triangle\mathrm{GCA}$ であるから　　$\triangle\mathrm{GHI}=\triangle\mathrm{ABC}-3\triangle\mathrm{IBC}$

ここで　　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，　$\triangle\mathrm{IBC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{IH}=\dfrac{1}{2}h$

よって

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{2}h=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\tan\theta(\sqrt{3}-\tan\theta)}{\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{(1+\tan^2\theta)-2\tan\theta(\sqrt{3}-\tan\theta)}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-2\sqrt{3}\tan\theta+3\tan^2\theta)\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+3\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos^2\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-\sqrt{3}\sin2\theta+3\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta+2)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{2\sin\left(2\theta-\frac{5}{6}\pi\right)+2\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\sin\left(2\theta-\frac{5}{6}\pi\right)+1\right\}$$

したがって，グラフは下の図の実線部分のようになる。